Содержание

НЕПРЕРЫВНО-ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ МОДЕЛИ (*D*-СХЕМЫ) 2

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ФИЗИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА 3

Семантическая модель физического объекта *4*

Формализация семантической модели *5*

Параметры модели 5

Отношения между параметрами модели 7

Изменение температуры во внутренних точках пластины 7

Начальные условия 8

Граничные условия 8

Аналитическая модель 10

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ПОЛУЧЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ТЕМПЕРАТУРЫ 12

Приведение аналитической модели к численному виду *12*

Метод конечных разностей *12*

Преобразование непрерывной модели в дискретное приближение 12

Приведение дифференциальных уравнений к численному виду 16

Шаблон конечно-разностного уравнения 18

Приведение граничных условий стационарности к численному виду 20

Приведение граничных условий термоизоляции к численному виду 20

Приведение начальных условий к численному виду 21

Практическое применение численной модели *21*

Проблема практического применения модели в численном виде *23*

ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ И ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ МОДЕЛИ 24

Построение непрерывно-детерминированной модели *24*

Приведение непрерывной модели к численному виду *26*

Компьютерная реализация модели 29

Исследование вычислительной устойчивости численного модели 33

ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ 34

НЕПРЕРЫВНО-ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ МОДЕЛИ (*D*-СХЕМЫ)

Существует класс информационных систем, работа которых заключается в постоянном мониторинге характеристик поведения физического объекта во времени, и управлении его состоянием. В качестве объектов могут выступать:

- компоненты промышленных технологических установок,
- объекты научных исследований,
- компоненты робототехнических систем,
- компоненты систем мониторинга параметров окружающей среды,
- и т.п.

Такие системы принято называть *системами реального времени* (СРВ), а их программное обеспечение – *приложением реального времени* (ПРВ). Ниже представлен пример концептуальной схемы СРВ, управляющей гидротехнической установкой (Рисунок **1**).

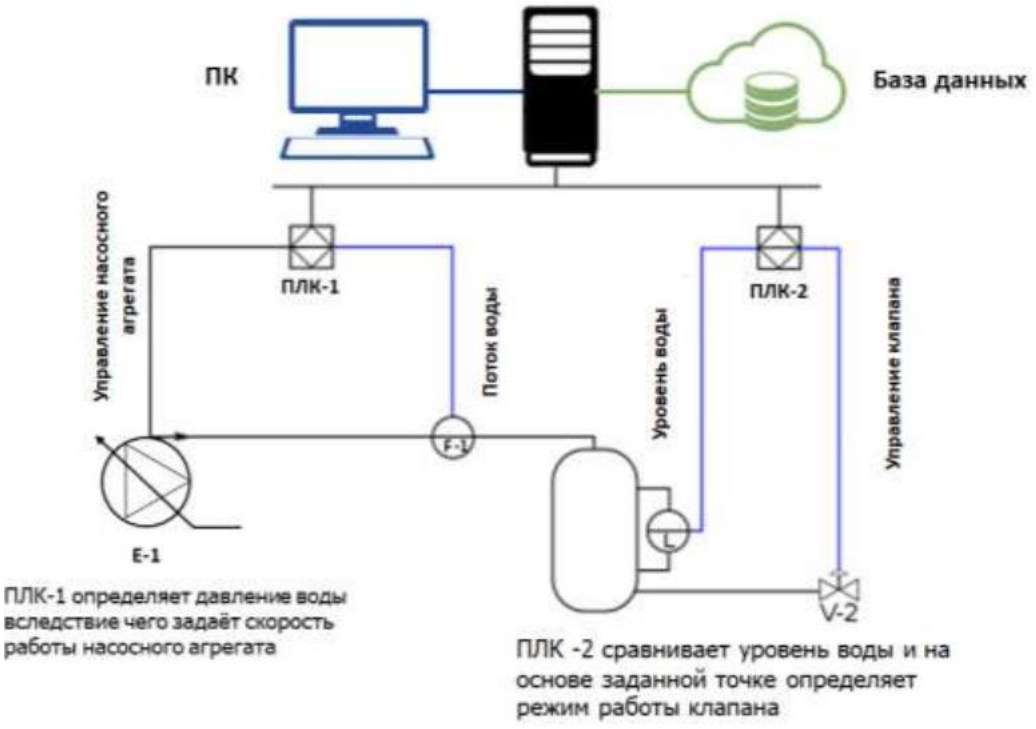

Рисунок 1 Концептуальная схема СРВ

Особенностью разработки приложений для СРВ является то, что для тестирования, отладки или оценки эксплуатационных характеристик разрабатываемого ПРВ требуется обмен данными приложения с физическим

объектом. Однако по целому ряду объективных причин обеспечить в "лабораторных условиях" доступ разрабатываемого ПРВ к контролируемым и управляемым параметрам реального физического объекта до окончания разработки и начала опытной эксплуатации на реальном объекте практически невозможно. Поэтому для отладки, тестирования и априорной оценки характеристик разрабатываемого ПРВ используются виртуальные модели физических объектов (процессов), программный интерфейс которых имитирует поведение реального объекта.

Для построения агрегатной модели физического объекта с динамическими параметрами и связывающими их отношениями применяются математические схемы класса *D*-схем (от англ. *D*ynamic), используемые для построения динамических моделей:

$$\begin{Bmatrix} P_{\bar{\mathcal{A}}} = \{\vec{x}, \vec{v}, \vec{h}, \vec{y}, t\}_{\bar{\mathcal{A}}} \\ R_{\bar{\mathcal{A}}}\{\vec{x}, \vec{v}, \vec{h}, \vec{y}, t\} \end{Bmatrix},$$

где отношения $R_{\bar{\mathcal{A}}}$ между параметрами $P_{\bar{\mathcal{A}}}$, удовлетворяют следующим условиям:

- все параметры модели $p \in P_{\bar{\mathcal{A}}}$ являются *детерминированными*;
- параметр времени t описывается моделью *непрерывного времени* - $M_{\mathcal{T}}(t_0, \delta t)$;
- множество выделенных отношений между параметрами - $R_{\bar{\mathcal{A}}}\{\vec{x}, \vec{v}, \vec{h}, \vec{y}, t\}$, выражается в форме системы алгебраических и/или дифференциальных уравнений;
- экстернальные параметры агрегата $\bar{\mathcal{A}}$ выражаются в модели функциональными зависимостями - $\vec{y}_{\bar{\mathcal{A}}}(t) = \vec{F}_{\bar{\mathcal{A}}}(\vec{x}, \vec{v}, \vec{h}, t)$.

Моделирование динамических параметров физического объекта

В качестве примера использования *D*-схем для интерпретации отношений между параметрами агрегатной модели физического объекта рассмотрим пример моделирования изменения во времени температуры в точках плоской тонкой однородной пластины ограниченной площади из теплопроводящего материала, по

границе которой происходит теплоэнергетическое взаимодействие с окружающей внешней средой. Целью моделирования является построение программного имитатора - виртуальной модели изменения во времени температуры в точках тонкой пластины, и её использование для тестирования разрабатываемого приложения, осуществляющего мониторинг и графическое отображение температуры на экране монитора.

Семантическая модель физического объекта

В качестве *объекта моделирования* выступает тонкая плоская однородная пластина G ограниченной площади из теплопроводящего материала, в точках которой во времени происходит изменение температуры (Рисунок 2).

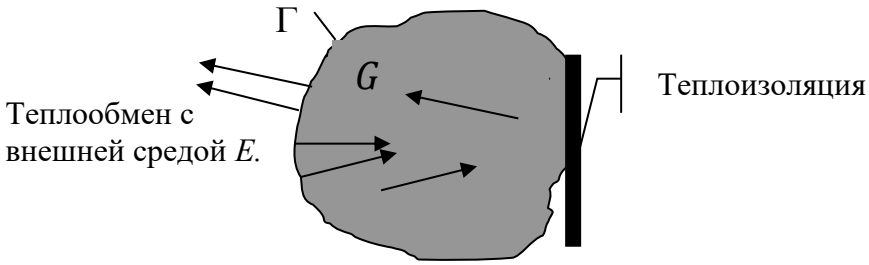

Рисунок 2 Семантическая модель объекта моделирования

Внутри пластины отсутствуют источники или поглотители тепловой энергии, поэтому изменение температуры во внутренних точках осуществляется исключительно за счёт взаимодействие пластины G по границе Γ с окружающей внешней средой E_G и непрерывного перетекания тепла от точек пластины с более высокой температурой к точкам с менее высокой температурой. На изменение температуры внутри пластины влияет теплопроводящее свойство однородного материала.

Предметом моделирования является изменение температуры в точках тонкой ограниченной однородной пластины G с заданным физическим свойством теплопроводности, в заданных условиях поведения температуры в точках границы пластины Γ с окружающей средой E_G, и с заданными начальными значениями температуры во внутренних точках пластины и на её границе.

Целью моделирования является создание динамической модели M_G изменения температуры в точках тонкой однородной пластины G, и её использование для разработки программного имитатора с интерфейсом взаимодействия, посредством которого разрабатываемое ПРВ может получать в текущий момент времени температуру в заданной точке пластины для отображения на экране монитора.

Выделим существенные факторы, вытекающие из анализа предмета моделирования, связанные с динамикой изменения температуры в точках тонкой пластины G. Очевидно, что на изменение температуры в точках пластины G влияют свойства теплопроводности однородного материала, а также изменение температуры в точках теплоэнергетического взаимодействия пластины с внешней средой E_G вдоль границы Г (Рисунок 2). Часть границы Г может иметь теплоизоляцию, защищающую пластину от теплообмена с внешней средой. В других точках границы Г температура наоборот может формироваться по заданному закону под воздействием источников/поглотителей тепловой энергии со стороны внешней среды E_G. Для упрощения модели ограничимся допущением, что на таких участках границы поддерживается заданная постоянная (стационарная) температура.

Формализация семантической модели

Параметры модели

Формализуем семантическую модель изменения температуры в точках пластины G в соответствии с обобщённой схемой агрегатного моделирования. Выделенные в семантической модели факторы, характеризующие и определяющие изменение температуры в точках пластины, специфицируем в виде множества параметров простого агрегата, которое обозначим P_G. Толщиной тонкой пластины будем пренебрегать, поэтому для идентификации точек пластины воспользуемся декартовой системой координат на плоскости с осями x

и y; пара (x, y) – координаты точки пластины: x – координата на оси x, y – координата на оси y.

Так как площадь пластины ограничена, то впишем её в прямоугольник со стороной по оси абсцисс $[0, X]$, по оси ординат - $[0, Y]$. Тогда всё множество точек пластины обозначим буквой $G \subseteq [0, X] \times [0, Y]$, $(x, y) \in G$. Множество точек границы пластины обозначим греческой буквой Г. Тогда множество внутренних точек пластины будет $G \backslash \Gamma$. Параметр времени $t \in M_T(0, \delta t)$ – непрерывно изменяется от 0 до ∞. Температуру в точке (x, y) в момент времени t обозначим - $u_{(x,y)}(t)$. Динамика изменения температуры во внутренних точках пластины зависит от материала, из которого пластина сделана. Для простоты положим, что материал пластины однородный и характеризуется соответствующим коэффициентом теплопроводности a. В результате множество выделенных параметров пластины G представим в виде:

$$P_G = \begin{Bmatrix} (x, y) \in G \backslash \Gamma \ - \text{ точки внутри пластины ;} \\ (x, y) \in \Gamma \ - \text{ точки границы;} \\ a \ - \text{ коэффициент теплопроводности;} \\ t \ - \text{ параметр времени;} \\ u_{(x,y) \in G \backslash \Gamma}(t) \ - \text{ температура во внутренних точках;} \\ u_{(x,y) \in \Gamma}(t) \ - \text{ температура в точках границы.} \end{Bmatrix}$$

Выделим в множестве P_G следующие подмножества, $P_G = H_G \cup V_G \cup X_G \cup Y_G$:

$H_G = \{G \backslash \Gamma, \Gamma, a\}$ - *внутренние параметры*: координаты точек, коэффициент теплопроводности a;

$V_G = \{u_{(x,y)}(t)\}_{(x,y) \in \Gamma}$ - *внешние параметры*: температура в точках границы пластины, формируемая окружающей средой E_G;

$X_G = \{u_{(x,y)}(0)\}_{(x,y) \in G \backslash \Gamma}$ - *входные воздействия*: температура в точках внутри пластины в начальный момент времени t=0;

$Y_G = \{u_{(x,y)}(t)\}_{(x,y) \in G \backslash \Gamma}$ - *выходные характеристики*: температура во внутренних точках пластины при t>0.

В качестве экзогенных параметров выступают внутренние параметры, внешние параметры и входные воздействия, значения которых формируются независимо от других параметров. В качестве эндогенных параметров выступают выходные характеристики.

Отношения между параметрами модели

Проинтерпретируем отношения, связывающие экзогенные и эндогенные параметры агрегатной модели M_G, формирующие температуру в точках пластины G, для чего воспользуемся результатами математического моделирования процессов изменения температуры в тонкой однородной пластине с заданными свойствами теплопроводности, полученными в теории *уравнений математической физики*.

Изменение температуры во внутренних точках пластины

Из теории уравнений математической физики следует, что температура во внутренних точках пластины при $t > 0$ определяется функцией $u(x, y, t)$, удовлетворяющей линейному неоднородному дифференциальному уравнению в частных производных, вид которого представлен ниже в трёх формах представления:

1. В общем виде:

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} - a\left(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2}\right) = 0; (x,y) \in G\backslash\Gamma$$

2. Для выделенной внутренней точки $(x = const, y = const)$:

$$\frac{\partial u_{(x,y)}(t)}{\partial t} - a\left(\frac{\partial^2 u_{(x,y)}(t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{(x,y)}(t)}{\partial y^2}\right) = 0; (x,y) \in G\backslash\Gamma$$

3. Для заданного момента времени $t = const$:

$$-a\left(\frac{\partial^2 u_{(t)}(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{(t)}(x,y)}{\partial y^2}\right) = 0; (x,y) \in G\backslash\Gamma.$$

Для получения однозначного решения дифференциального уравнения необходимо задать в модели начальные значения температуры во внутренних

точках пластины в момент времени $t = 0$ ($начальные\ условия$), а также явно задать поведение температуры в точках на границе пластины как результат теплового воздействия внешней среды E_G на точки границы ($граничные\ условиями$).

Начальные условия

Начальные условия задают значения температуры во внутренних точках пластины в начальный момент времени $t = 0$, что формально определяет их как экзогенные параметры, значения которых формируются заданным способом установки начальной температуры во внутренних точках пластины, и выражается в виде обычных алгебраических уравнений вида:

$$u_{(0)}(x, y)\big|_{(x,y)\in G\setminus\Gamma} = \phi(x, y),$$

где $\phi(x, y)$ – функция значений температуры во внутренних точках пластины $(x, y) \in G\setminus\Gamma$ в момент времени $t = 0$.

Граничные условия

Граничные условия характеризуют изменение температуры в точках границы Г в результате взаимодействия пластины G с внешней средой E_G. Всего теоретически существует три вида воздействия внешней среды E_G на формирование температуры в граничных точках Г пластины G, которые в теории уравнений математической физики называют граничными условиями *первого*, *второго* и *третьего* рода. Для простоты будем учитывать влияние внешней среды на температуру в граничных точках пластины G в виде граничных условий только первого и второго рода.

Граничные условия **первого рода**.

Граничные условия первого рода определяют участки границы $\Gamma^1 \subseteq \Gamma$, в точках которых первоначально заданная температура от времени не зависит - является статической. В нашем случае температура в точках участка границы Γ^1 будет считаться в начальный момент времени заданной и в течении всего времени неизменной (теоретически поддерживаться в точках границы за счёт

внешнего подогрева или охлаждения). Такие граничные условия формально выражаются в виде обычных алгебраических уравнений:

$$\forall t: u_{(t)}(x,y) = \psi(x,y)_{(x,y)\in\Gamma^1},$$

где $\psi(x,y)_{(x,y)\in\Gamma^1}$ – функция значений статической температуры в точках участка границы пластины $(x,y) \in \Gamma^1 \subseteq \Gamma$.

Граничные условия **второго рода**.

Граничные условия второго рода определяют участки границы $\Gamma^2 \subseteq \Gamma$, точки которых защищены от внешней среды E_G слоем *термоизоляции*, которая препятствует перетеканию тепловой энергии как наружу, так и внутрь пластины. Это означает, что температура в точках границы термоизоляции определяется и всегда совпадает с температурой внутренних точек пластины, бесконечно близких к точкам границы. Формально это выражается в том, что в этой точке в направлении перпендикулярном к границе перепад температур между ближайшей внутренней точкой и точкой границы отсутствует, а следовательно отсутствует и скорость изменения температуры, т.е. градиент температуры в точках границы Γ^2 в направлении вектора, перпендикулярного границе в этой точке, равен нулю.

Формально граничное условие термоизоляции удобно выразить с помощью градиента (скорости изменения) температуры в направлении нормали в точке границы - *единичного* вектора $\vec{n}$, перпендикулярного к границе в некоторой точке $(x,y) \in \Gamma^2 \subseteq \Gamma$ (Рисунок 3).

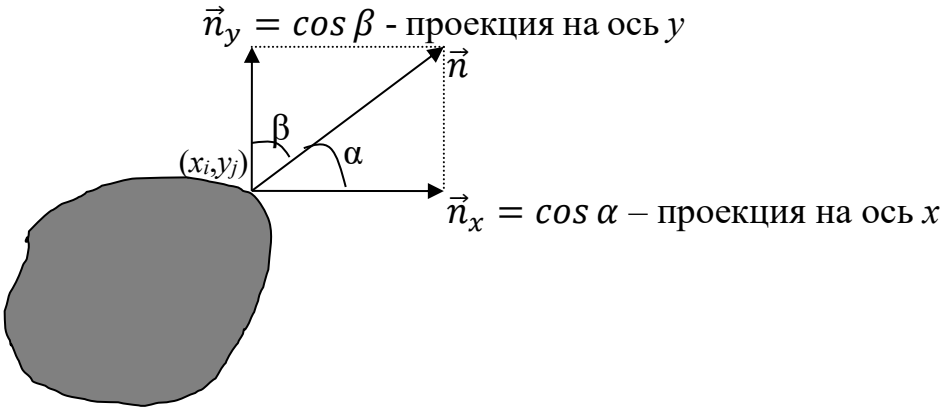

Рисунок 3 Нормаль в точке границы пластины

Условие термоизоляции границы означает, что в любой момент времени t в точках границы осуществляется мгновенный обмен тепловой энергией с прилегающими к границе внутренними точками пластины. А отсутствие обмена тепловой энергией между точками границы и точками внешней среды означает, что скорость изменения температуры в точках границы Γ^2 по направлению внешней среды равна нулю. Формально это означает, что по направлению нормали $\vec{n}$ в точке границы $(x, y) \in \Gamma^2$ производная (градиент) от $u_{(t)}(x, y)$ равна нулю:

$$\text{grad}\left(u_{(t)}(x,y)\right) = \frac{\partial u_{(t)}(x,y)}{\partial \vec{n}} = 0, (x,y) \in \Gamma^2 \subseteq \Gamma, \forall t.$$

Градиентное выражение условия термоизоляции в декартовой системе координат пластины будет иметь вид:[1]

$$\frac{\partial u_{(t)}(x,y)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u_{(t)}(x,y)}{\partial y}\cos\beta = 0, (x,y) \in \Gamma^2 \subseteq \Gamma, \forall t;$$

где α и β – углы между единичным вектором $\vec{n}$ и его проекциями на координатные оси x, y соответственно, $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. Значения $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ - *направляющие косинусы*, знаки которых соответствуют знаку проекции единичного вектора $\vec{n}$ на декартовые координатные оси x, y *единичного* вектора - $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta)$.

Аналитическая модель

В итоге множество отношений R_G, связывающих параметры модели изменения температуры в точках плоской тонкой пластины M_G, примет вид:

[1] Производная по направлению (градиент) в декартовой системе координат равна сумме попарных произведений частных координатных производных в данной точке (x, y) на направляющие косинусы данного направления:
$\text{grad}\left(u_{(t)}(x,y)\right) = \frac{\partial u(x,y)}{\vec{n}} = \frac{\partial u(x,y)}{x} cos_{(x,y)}\,\alpha + \frac{\partial u(x,y)}{y} cos_{(x,y)}\,\beta$

$$R_G \left\{ \begin{array}{c} \text{Начальная температура внутри пластины} \\ u_{(0)}(x,y)\big|_{(x,y)\in G\backslash\Gamma} = \phi(x,y), t = 0; \\ \text{Изменение температуры внутри пластины} \\ \dfrac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} - a\left(\dfrac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2}\right) = 0; (x,y) \in G\backslash\Gamma, \forall t > 0; \\ \text{Значения стационарной температуры на границах типа } \Gamma^1 \\ \forall t \geq 0: u_{(t)}(x,y) = \psi_{\Gamma_i^1}(x,y), (x,y) \in \Gamma_i^1 \subseteq \Gamma; i - \text{номер границы} \\ \text{Значения температуры на границах с термоизоляцией} - \text{ типа } \Gamma^2 \\ \dfrac{\partial u_{(t)}(x,y)}{\partial x}\cos_{(x,y)}\alpha + \dfrac{\partial u_{(t)}(x,y)}{\partial y}\cos_{(x,y)}\beta = 0, (x,y) \in \Gamma_j^2 \subseteq \Gamma, \forall t; j - \text{номер границы} \end{array} \right\}$$

Полученная в общем виде аналитическая модель, описывающая изменение во времени температуры в точках тонкой пластины G, является примером классической непрерывно-детерминированной модели класса *D*-схем, которая представляет собой систему дифференциальных и алгебраических уравнений. Для её практического использования в качестве модели конкретной пластины необходимо в явном виде задать коэффициент теплопроводности - α, функцию начальной температуры во внутренних точках пластины - $\phi(x,y)$, значения стационарной температуры на всех границах типа Γ^1 - $\psi_{\Gamma_i^1}(x,y)$, и значения направляющих косинусов $\cos_{(x,y)}\alpha$ $\cos_{(x,y)}\beta$ и на границах с теплоизоляцией типа Γ^2.

Цель экспериментов с полученной аналитической моделью заключается в нахождении выходных характеристик модели - $Y_G = \{u_{(x,y)}(t)\}_{(x,y)\in G\backslash\Gamma}$, выражающих динамику изменения во времени температуры во внутренних точках тонкой пластины G в заданных граничных условиях, начиная с начально заданной температуры $\{u_{(x,y)}(0)\}_{(x,y)\in G\backslash\Gamma}$. Для "простых" аналитических моделей эксперимент может реализоваться в виде применения математических методов нахождения функции $u(x,y,t)$ в аналитическом виде. В общем случае, в силу разных особенностей аналитической модели, нахождение решения полученной системы уравнений в аналитическом виде не всегда возможно. Поэтому на практике обычно используются различные численные методы нахождения функции температуры в табличной форме на дискретном конечном множестве

точек пластины в табличной форме - $u(x_i, y_j, t_k)$: $(x_i, y_j) \in G;\ i = \overline{0,n}; j = \overline{0,m};$ $k = \overline{0,\infty}$.

Численный метод получения значений температуры

Приведение аналитической модели к численному виду

Численные методы заменяют поиск функции $u(x, y, t)$ в аналитической форме процедурой построения функции $u(x_i, y_j, t_k)$ в *табличной* форме на некотором ограниченном дискретном множестве внутренних точек пластины $(x_i, y_j) \in G \backslash \Gamma$ и на ограниченной последовательности дискретных моментов реального времени $t_k, k = 0,1,2, \dots, K \to \infty$. Численные методы обладают тем важным свойством, что теоретически позволяют с заданной точностью получить решение в табличной форме для системы уравнений, для которой невозможно получить решение в аналитическом виде.

Существует множество различных численных методов нахождения решения системы дифференциальных уравнений в табличной форме. Среди них классическим методом считается *метод конечных разностей*. Метод конечных разностей основан на замене дифференциальных уравнений системы их приближёнными аналогами в виде конечно-разностных алгебраических рекуррентных уравнений, позволяющих итерационно строить функциональную зависимость $u(x_i, y_j, t_k)$ в табличной форме.

Метод конечных разностей

Преобразование непрерывной модели в дискретное приближение

Преобразование построенной непрерывной модели изменения температуры в точках тонкой пластины в дискретное приближение выражается в замене непрерывной области определения координат точек пластины $(x, y) \in G$ множеством дискретных значений $(x_i, y_j) \in \bar{G} \approx G$, изменение температуры в которых осуществляется в моменты t_k дискретного реального времени -

$u(x_i, y_j, t_k)$. Координаты (x_i, y_j, t_k) называют узлами *регулярной сетки* (Рисунок 4).

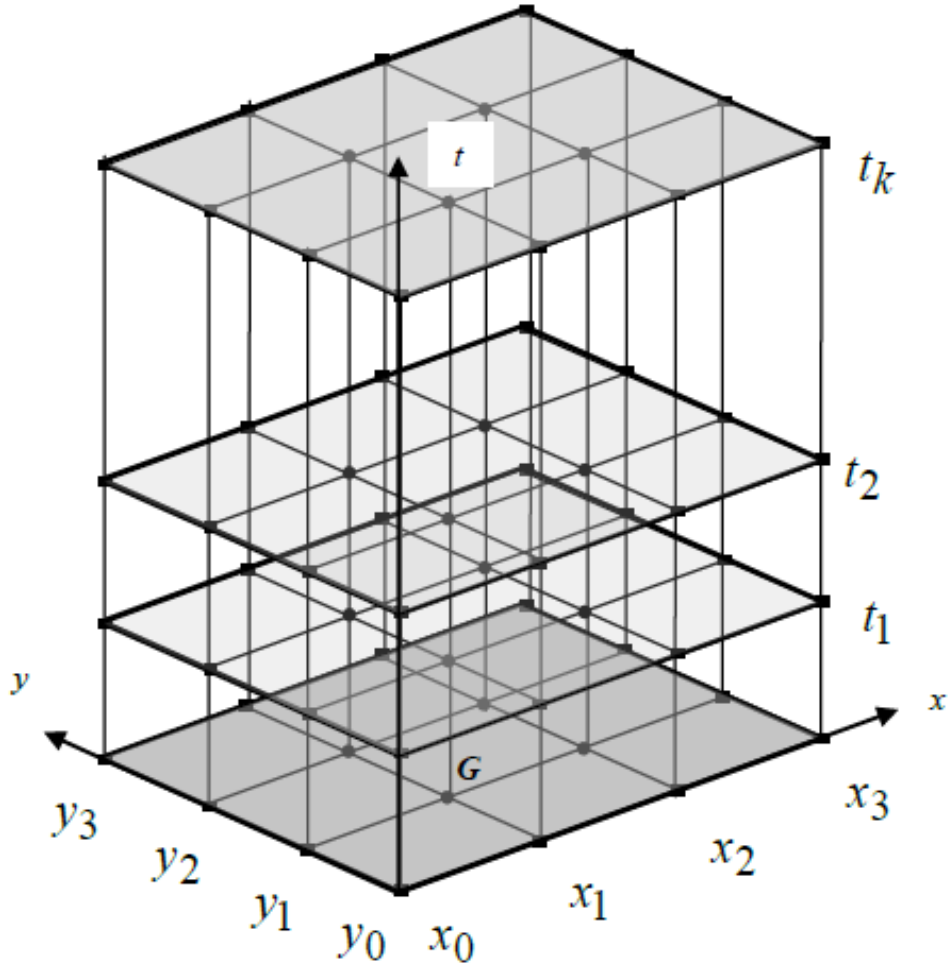

Рисунок 4 Пример дискретизации непрерывных параметров динамической модели

Узлы сетки вдоль осей координат равноотстоят друг от друга с заданным шагом: $x_i = x_0 + ih_x, y_j = y_0 + jh_y, t_k = k\tau$; где h_x, h_y - шаги дискретизации по осям x и y; τ - шаг дискретизации вдоль оси времени t; $i = \overline{0,n}; j = \overline{0,m}$; $k = \overline{0,K}$; $K \to \infty$. В итоге искомая непрерывная функция $u(x, y, t)$ заменяется нахождением её значений $u(x_i, y_j, t_k)$ в узловых точках сетки дискретизации (x_i, y_j, t_k). Поскольку индексы узлов регулярной сетки (i, j, k) взаимно-однозначно определяют значения координат соответствующих точек (x_i, y_j, t_k): $x_i = x_0 + ih_x$, $y_j = y_0 + jh_y$, $t_k = k\tau$; то для простоты выражений вместо записи $u(x_i, y_j, t_k)$ будет использоваться короткая запись - u_{ij}^k.

При конечных размерах пластины G она может быть вписана в прямоугольник со сторонами L_x и L_y, параллельными осям координат (Рисунок 5):

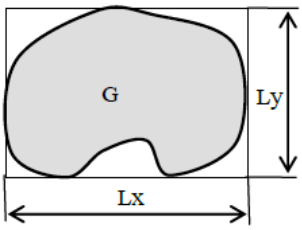

Рисунок 5

Так как пространственные координаты узловых точек пластины ограничены размером пластины, то дискретное множество точек пластины является конечным, а дискретный параметр времени $k = \overline{0,K}$ является счётным при $K \to \infty$. Следовательно, множество значений u_{ij}^k – счётное, и представимо в виде трёхмерной матрицы временны́х температурных слоёв:

$$U = \left[u_{ij}^k\right]_{i=\overline{0,n};j=\overline{0,m}}^{k=\overline{0,K}}.$$

Для получения значений переменных x_i и y_j шаги дискретизации по осям пространственных координат связывают с размерами прямоугольника L_x, L_y и выбранным количеством узловых точек по осям x и y соответственно. Тогда:

$h_x = \frac{L_x}{n}$, n – количество узловых точек по оси x;

$h_y = \frac{L_y}{m}$, m – количество узловых точек по оси y.

Если между h_x и h_y установить пропорцию $\lambda = \frac{h_y}{h_x}$, то шаг дискретизации h_y можно связать с шагом дискретизации h_x линейной зависимостью:

$$h_y = \lambda h_x.$$

Для удобства использования в дальнейшем в формулах расчёта дискретных значений u_{ij}^k шаг дискретизации τ параметра времени t также связывают с шагом дискретизации h_x. Учитывая, что параметр времени t не может быть отрицательным, шаг τ дискретизации по времени выражается формулой:

$$\tau = \mu h_x^2.$$

Важно заметить, что в общем случае пространственная дискретизация вынуждает аппроксимировать границу пластины ближайшими узлами сетки к точкам реальной границы, которые, в пределах шага дискретизации, могут оказаться как внутри пластины, так за её пределами. Формирование граничных узлов является результатом произвольного отнесения к границе «спорных ближайших» узлов пространственной решётки. Очевидно, что этот выбор будет влиять на адекватность представления непрерывной пластины в пространственной узловой модели (Рисунок 6).

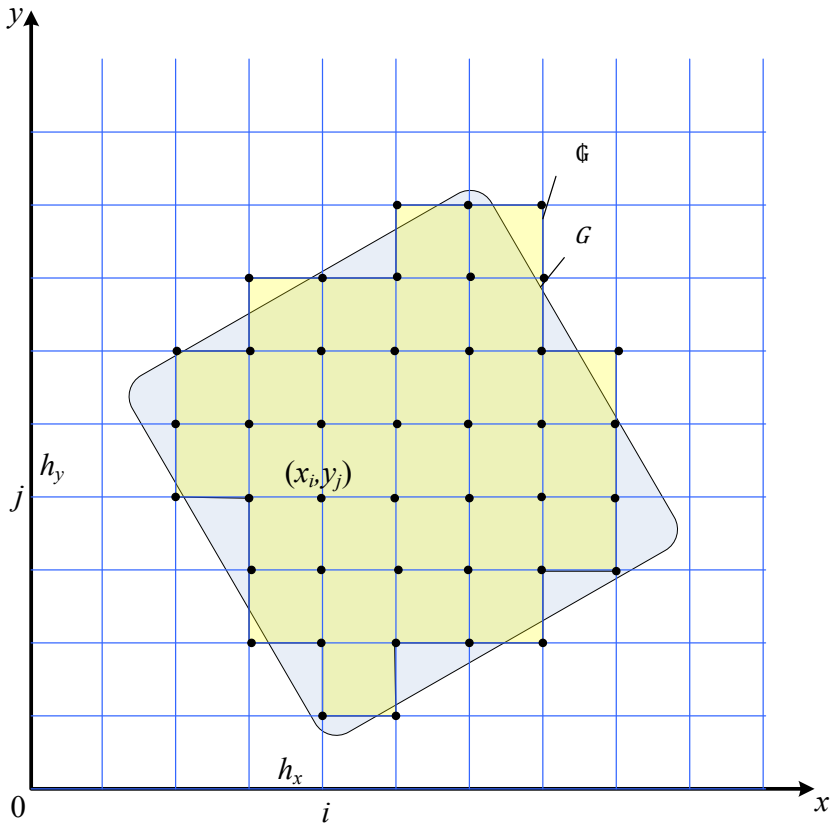

Рисунок 6 Пространственная узловая модель пластины

Заметим также, что выбор ориентации системы координат относительно пластины может существенно влиять на адекватность узловой интерпретации её границы. В итоге имеем замену непрерывной пластины G приближённым дискретным образом ¢: $(x_i, y_j) \in ¢ \approx G$.

Приведение дифференциальных уравнений к численному виду

Вслед за пространственно-временной дискретизацией значений непрерывных параметров в исходной непрерывной модели необходимо для нахождения решения дифференциального уравнения численным методом осуществить замену дифференциальных уравнений их дискретными аналогами в алгебраической форме, которая заключается в замене в дифференциальных уравнениях всех производных их приближёнными конечно-разностными алгебраическими аналогами, что в итоге приводит к замене дифференциальных уравнений их приближёнными конечно-разностными аналогами в виде рекуррентных алгебраических уравнений. Конечно-разностные аналоги частных производных функции $u(x,y,t)$ в точке (x_i, y_j, t_k) с учётом возникающей ошибки дискретизации представляются следующими выражениями.

Конечно-разностный аналог производной функции $u(x,y,t)$ по координате времени t в точке (x_i, y_j, t_k) с шагом приращения τ:

$\left.\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}\right|_{(x_i,y_j,t_k)} = \frac{u_{ij}^{k+1}-u_{ij}^{k}}{\tau} + O(\tau)$, $O(\tau)$ – ошибка дискретизации;

Конечно-разностный аналог первой производной функции $u(x,y,t)$ по координате x в точке (x_i, y_j, t_k) с шагом приращения h_x:

$\left.\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x}\right|_{(x_i,y_j,t_k)} = \frac{u_{i+1j}^{k}-u_{ij}^{k}}{h_x} + O(h_x)$, $O(h_x)$ – ошибка дискретизации;

Конечно-разностный аналог первой производной функции $u(x,y,t)$ по координате x в точке (x_i, y_j, t_k) с шагом приращения $2h_x$:

$\left.\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x}\right|_{(x_i,y_j,t_k)} = \frac{u_{i+2j}^{k}-u_{ij}^{k}}{2h_x} + O(2h_x)$, $O(2h_x)$ – ошибка дискретизации.

Конечно-разностный аналог первой производной функции $u(x,y,t)$ по координате y в точке (x_i, y_j, t_k) с шагом приращения h_y:

$\left.\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial y}\right|_{(x_i,y_j,t_k,)} = \frac{u_{ij+1}^{k}-u_{i.j}^{k}}{h_y} + O(h_y), O(h_y)$ – ошибка дискретизации.

Конечно-разностный аналог первой производной функции $u(x,y,t)$ по координате y с шагом приращения $2h_y$:

$\left.\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial y}\right|_{(x_i,y_j,t_k)} = \frac{u_{ij+2}^k - u_{ij}^k}{2h_y} + O(2h_y)$, $O(2h_y)$ – ошибка дискретизации.

Конечно-разностный аналог второй производной функции $u(x,y,t)$ с шагом h_x приращения первой производной по координате *x* имеет вид:

$$\left.\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2}\right|_{(x_i,y_j,t_k)} = \frac{\left(\frac{u_{i+1j}^k - u_{ij}^k}{h_x}\right) - \left(\frac{u_{ij}^k - u_{i-1j}^k}{h_x}\right)}{h_x} + O\left(h_x^2\right),$$

$\left.\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2}\right|_{(x_i,y_j,t_k)} = \frac{u_{i+1j}^k - 2u_{ij}^k + u_{i-1j}^k}{h_x^2} + O(h_x^2)$ – ошибка дискретизации.

Аналогично, конечно-разностный аналог второй производной функции $u(x,y,t)$ с шагом h_y приращения первой производной по координате *y* имеет вид:

$\left.\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2}\right|_{(x_i,y_j,t_k)} = \frac{u_{ij+1}^k - 2u_{ij}^k + u_{ij-1}^k}{h_y^2} + O(h_y^2)$, $O(h^2{}_y)$ – ошибка дискретизации.

Используя теперь введённые конечно-разностные аналоги производных, построим конечно-разностный аналог дифференциального уравнения функции изменения температуры во внутренних точках пластины, в котором для простоты положим коэффициент теплопроводности a=1. Тогда дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2}\right) = 0; (x,y) \in G \backslash \Gamma;$$

заменится алгебраическим конечно-разностным рекуррентным уравнением с аргументами в индексной форме:

$$\frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^k}{\tau} - \frac{u_{i+1j}^k - 2u_{ij}^k + u_{i-1j}^k}{h_x^2} - \frac{u_{ij+1}^k - 2u_{ij}^k + u_{ij-1}^k}{h_y^2} = 0; \left(x_i, y_j\right) \in ¢ \backslash \Gamma.$$

Приведём полученное выражение к более удобному для использования виду. Для этого умножим правую и левую часть уравнения на h_y^2:

$$\frac{h_y^2\left(u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^k\right)}{\tau} - \frac{h_y^2\left(u_{i+1j}^k - 2u_{ij}^k + u_{i-1j}^k\right)}{h_x^2} - \frac{h_y^2\left(u_{ij+1}^k - 2u_{ij}^k + u_{ij-1}^k\right)}{h_y^2} = 0.$$

Выполнив замены с учётом того, что $\tau = \mu h_x^2$ и $h_y = \lambda h_x$, получим:

$$\frac{\lambda^2 h_x^2\left(u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k}\right)}{\mu h_x^2} - \frac{\lambda^2 h_x^2\left(u_{i+1j}^{k} - 2u_{ij}^{k} + u_{i-1j}^{k}\right)}{h_x^2} - \frac{h_y^2\left(u_{ij+1}^{k} - 2u_{ij}^{k} + u_{ij-1}^{k}\right)}{h_y^2} = 0.$$

Произведём очевидные сокращения:

$$\frac{\lambda^2\left(u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k}\right)}{\mu} - \lambda^2\left(u_{i+1j}^{k} - 2u_{ij}^{k} + u_{i-1j}^{k}\right) - \left(u_{ij+1}^{k} - 2u_{ij}^{k} + u_{ij-1}^{k}\right) = 0.$$

Теперь выполним ряд последовательных эквивалентных преобразований полученного выше конечно-разностного уравнения для его приведения к виду, удобному для рекуррентных вычислений во времени значений температуры во внутренних узлах пластины:

$$u_{ij}^{k+1} = \frac{\mu\left[\lambda^2\left(u_{i+1j}^{k} - 2u_{ij}^{k} + u_{i-1j}^{k}\right) + \left(u_{ij+1}^{k} - 2u_{ij}^{k} + u_{ij-1}^{k}\right)\right]}{\lambda^2} + u_{ij}^{k};$$

$$u_{ij}^{k+1} = \mu\left[\left(u_{i+1j}^{k} - 2u_{ij}^{k} + u_{i-1j}^{k}\right) + \frac{1}{\lambda^2}\left(u_{ij+1}^{k} - 2u_{ij}^{k} + u_{ij-1}^{k}\right)\right] + u_{ij}^{k};$$

$$u_{ij}^{k+1} = \left[1 - 2\mu\left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right)\right]u_{ij}^{k} + [\mu]u_{i+1j}^{k} + [\mu]u_{i-1j}^{k} + \left[\frac{\mu}{\lambda^2}\right]u_{ij+1}^{k} + \left[\frac{\mu}{\lambda^2}\right]u_{ij-1}^{k}.$$

Полученный в результате вид конечно-разностного уравнения позволяет последовательно во времени итерационно вычислять значения температуры u_{ij}^{k+1} во внутренних узлах табулируемой функции $u(x, y, t)$ в очередном $(k+1)$-ом временно́м слое, используя полученные значения этой функции в точках предыдущего *k*–ого временно́го слоя. При этом значения температуры в точках пластины для нулевого временно́го слоя u_{ij}^{0} получаются из заданных в модели уравнений, определяющих температуру в нулевой момент времени во внутренних точках пластины (начальные условия) и, начиная с нулевого, определяют температуру в каждый момент времени в точках на границе (граничные условия).

Шаблон конечно-разностного уравнения

Если для упрощения вычислений положить коэффициент пропорции λ=1, то конечно-разностная рекуррентная форма вычисления временны́х слоёв температуры u_{ij}^{k} во внутренних точках пластины - $(x_i, y_j) \in \Phi\backslash\Gamma$, принимает вид:

$u_{ij}^{k+1} = (1-4\mu)u_{ij}^{k} + \mu\left[u_{i+1j}^{k} + u_{i-1j}^{k} + u_{ij+1}^{k} + u_{ij-1}^{k}\right], \qquad k = 0,1,2,\dots.$

Используя полученное выражение, формирование дискретной функции $u(x_i, y_j, t_k) \equiv u_{ij}^{k}$ в виде трёхмерной таблицы можно проинтерпретировать графической схемой (Рисунок 7), получившей название - *шаблон конечно-разностного уравнения*.

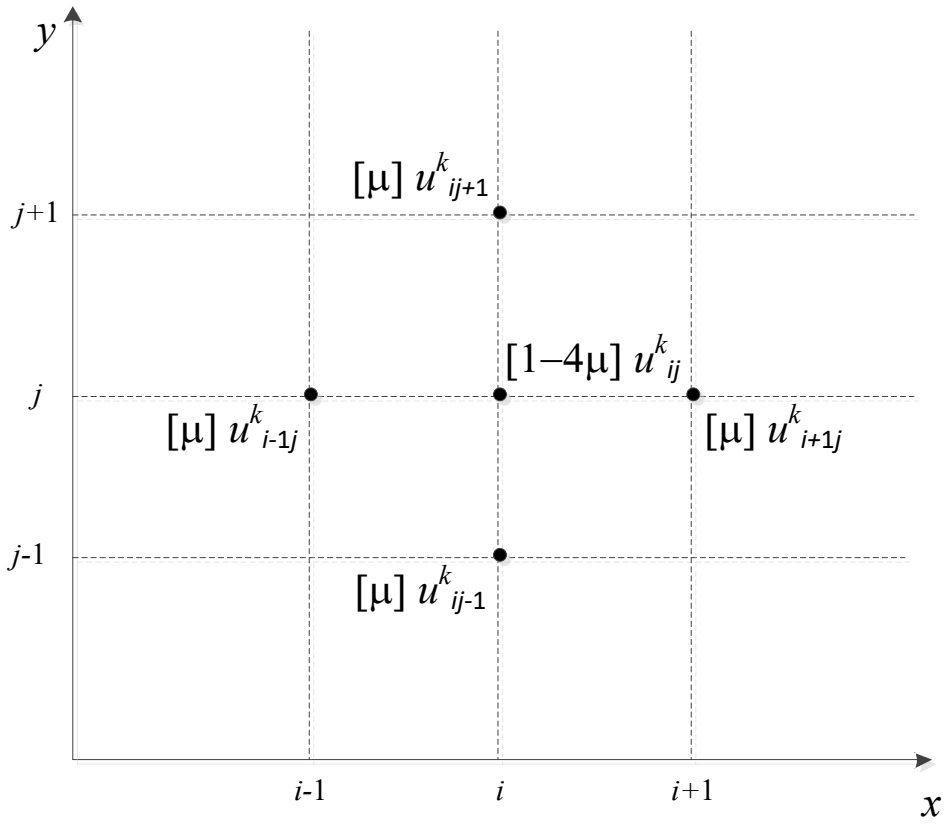

Рисунок 7 Шаблон конечно-разностного уравнения

Мысленно совмещая перекрестие шаблона с некоторым узлом u_{ij}^{k} *k*–ого временно́го слоя дискретной сетки, а концы креста соответственно с окружающими его узлами: u_{i-1j}^{k}, u_{i+1j}^{k}, u_{ij-1}^{k}, u_{ij+1}^{k}, получаем исходные данные для вычисления значения температуры u_{ij}^{k+1} искомой функции в соответствующей внутренней точке пластины в следующем (*k*+1)-ом временно́м слое, используя указанные в шаблоне коэффициенты для умножения на значения температуры в соответствующих узлах предыдущего временно́го слоя.

В итоге, расчёт элементов временны́х слоёв матрицы $U^{k} = \left[u_{ij}^{k}\right]_{i=\overline{1,n};j=\overline{1,m}}^{k=1,2,3,\dots,K\to\infty}$ вдоль оси времени t производится итерационно послойно для всех внутренних

точек сетки очередного слоя, используя в качестве исходных данных значения температуры в узлах сетки предыдущего слоя.

Значения температуры в узлах границы - $u_{ij}^{k}\big|_{(x_i,y_j)\in\Gamma}$, вычисляются с использованием формул для различного рода заданных граничных условий, которые в свою очередь преобразуются к дискретной форме. Если граничные условия заданы в виде дифференциального уравнения (например, условие термоизоляции), то они также преобразуются к численному конечно-разностному виду.

Приведение граничных условий стационарности к численному виду

Граничные условия стационарности вида:

$$u_{(t)}(x,y) = \psi(x,y), (x,y) \in \Gamma^1 \subseteq \Gamma, \forall t,$$

в результате дискретизации выражаются простыми алгебраическими уравнениями для получения температуры в узлах границы:

$$\mathrm{u}_{ij}^{k} = \psi_{ij}, \left(x_i, y_j\right) \in \Gamma^1, \forall k = 0,1,2,\dots$$

Приведение граничных условий термоизоляции к численному виду

Градиент температуры $\mathrm{grad}\left(u_{(t)}(x,y)\right) = \frac{\partial u_{(t)}(x,y)}{\partial \vec{n}}$ в точках границы пластины с термоизоляцией в обычной координатной форме выражается дифференциальным уравнением вида:

$$\left(\frac{\partial u_{(t)}(x,y)}{\partial x}\cos_{(x,y)}\alpha + \frac{\partial u_{(t)}(x,y)}{\partial y}\cos_{(x,y)}\beta\right)\Bigg|_{(x,y)\in\Gamma^2} = 0, \forall t.$$

Проведя замену производных конечно-разностными аналогами, перейдём к конечно-разностной форме этого дифференциального уравнения в узле границы u_{ij}^{k}. Получим:

$$\frac{u_{ij}^{k} - u_{i-1j}^{k}}{h_x}\cos_{(x_i,y_j)}\alpha + \frac{u_{ij}^{k} - u_{ij-1}^{k}}{h_y}\cos_{(x_i,y_j)}\beta = 0, \forall\left(x_i, y_j\right) \in \Gamma^2, \forall k = 0,1,2,\dots.$$

Умножив обе части уравнения на h_x, и учтя, что $h_y = \lambda h_x$, получим:

$$(u_{ij}^k - u_{i-1j}^k)\cos_{(x_i,y_j)}\alpha + \frac{(u_{ij}^k - u_{ij-1}^k)}{\lambda}\cos_{(x_i,y_j)}\beta = 0, (x_i, y_j) \in \Gamma^2, \forall k = 0,1,2, \dots .$$

Перенеся u_{ij}^k в левую часть уравнения получаем конечно-разностное уравнение для вычисления температуры в точках границы (x_i, y_j) с термоизоляцией:

$$u_{ij}^k = \frac{\left(\lambda\cos_{(x_i,y_j)}\alpha\right)u_{i-1j}^k + \left(\cos_{(x_i,y_j)}\beta\right)u_{ij-1}^k}{\lambda\cos_{(x_i,y_j)}\alpha + \cos_{(x_i,y_j)}\beta}, \forall(x_i, y_j) \in \Gamma^2, \forall k = 0,1,2, \dots .$$

Заметим, что в формуле зависимость от времени (индекс k) не является рекуррентной. Формула позволяет определить значения изменяющейся температуры $u(x_i, y_j, t_k)$ в точке границы пластины $(x_i, y_j) \in \Gamma^2$ в $t_k -$ ом временно́м слое u_{ij}^k используя температуру в ближайших соседних внутренних точках текущего временного слоя - u_{i-1j}^k, u_{ij-1}^k. Последовательно двигаясь в k-ом временном слое по точкам границы $u_{ij}^k \in \Gamma^2$ и используя значения температуры в двух внутренних точках u_{i-1j}^k и u_{ij-1}^k, ближайших к текущей граничной точке $(x_i, y_j) \in \Gamma^2$ по осям x и y, вычисляем значения температуры во всех точках границы Γ^2.

Приведение начальных условий к численному виду

Представим в дискретной форме начальные условия, которые в непрерывной форме имеют вид:

$$u_{(0)}(x, y) = \phi(x, y), (x, y) \in G\backslash\Gamma, t = 0.$$

Роль начальных условий, заключается в том, что они определяют распределение температуры внутри пластины в начальный момент времени (при t=0), т.е. в первом временно́м слое матрицы значений функции. Их преобразование в дискретную форму очевидно и имеет вид:

$$u_{ij}^0 = \phi_{ij}, (x_i, y_j) \in \Phi\backslash\Gamma, t = 0.$$

Практическое применение численной модели

Программно реализованный метод конечных разностей нахождения решения построенной модели может быть использован для имитации изменения

температуры в каждой точке пластины - $u_{ij}^{k},\ (x_i, y_j) \in \Gamma$, в заданном реальном времени с тиком $\tau = \mu h_x^2$. Для вычисления температуры в граничных и внутренних точках пластины в начальный момент времени (U^0 - слой матрицы U при k=0) используются полученные численные выражения для задания начальных и граничных условий:

$$U^0 = \left[u_{ij}^0 = \begin{cases} \psi_{ij},\ (x_i, y_j) \in \Gamma; \\ \phi_{ij},\ (x_i, y_j) \in \Gamma \backslash \Gamma \end{cases} \right]_{i=\overline{0,n}; j=\overline{0,m}}$$

Например, матрица U^0 может выглядеть так:

$$U^0 = \begin{bmatrix} \psi_{00} & \psi_{01} & \psi_{02} & \psi_{03} & \varnothing_{04} \\ \psi_{10} & \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} & \psi_{14} \\ \psi_{20} & \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} & \psi_{24} \\ \psi_{30} & \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} & \psi_{34} \\ \varnothing_{40} & \psi_{41} & \psi_{42} & \psi_{43} & \varnothing_{44} \end{bmatrix}.$$

Здесь ψ_{ij} – температура, вычисленная в нулевой момент времени в точках различных участков границы пластины в соответствии с заданными граничными условиями; ϕ_{ij} – начальная температура во внутренних точках пластины, вычисленная в нулевой момент времени в соответствии с заданными начальными условиями. Если появляются "лишние" точки матрицы, оказавшиеся за границей пластины, то их в матрице помечают как "пустое" значение символом ∅, они в расчётах использоваться не будут.

Опираясь на значения температуры предыдущего нулевого слоя, используя шаблон конечно-разностного уравнения, строится следующий временно́й слой матрицы – U^1. Таким же способом, опираясь на значения температуры в предыдущем временно́м слое, строятся все последующие временны́е температурные слои матрицы U^k.

Процесс построения временны́х слоёв - матриц U^k, теоретически может продолжаться бесконечно, но практически он завершается либо из-за возникшей *проблемы устойчивости* результатов вычислений, либо результаты вычислений перестают изменяться в пределах заданной точности – достигнуто стационарное состояние распределения температуры в пластине.

Проблема практического применения модели в численном виде

Поиск решений дифференциальных уравнений численными методами путём их замены приближёнными конечно-разностными аналогами имеет важные особенности. Например, теоретически показано, что стремлении h_x, h_y, τ к 0 не гарантирует, что конечно-разностное решение дифференциального уравнения всегда стремиться к аналитическому решению оригинала. Кроме того, практика применения конечно-разностной аппроксимации дифференциальных уравнений показала, что вычислительная процедура (численный метод) получения искомой матрицы U^k не обладает абсолютной устойчивостью. Устойчивостью численного метода называют свойство метода не накапливать погрешностей, полученных на предшествующих шагах работы алгоритма. Устойчивость и погрешность решения дифференциальных уравнений методом конечных разностей зависит от множества факторов. Важными составляющими, в частности, являются:

- методическая погрешность метода, обусловленная дискретизацией пространства переменных и заменой частных производных конечными разностями;
- погрешность округления результатов арифметических операций, связанная с ограниченной разрядностью представления данных в вычислительных устройствах;
- погрешность округления результатов арифметических операций, являющихся числами с бесконечной дробной частью.

Провести полное исследование влияния перечисленных выше факторов на погрешность и устойчивость решении дифференциальных уравнений в частных производных методом конечных разностей в общем случае затруднительно. Однако выявлено, что для метода конечных разностей устойчивость существенно зависит от соотношения между шагом по пространственным координатам h и шагом по оси времени - $\tau = \mu h^2$. Показано, что конечно-разностная схема устойчива, если $\tau < h^2/4$. Так как $\tau = \mu h^2 < h^2/4$, следовательно, $\mu < 0.25$.

Пример построения и численной реализации модели

Построение непрерывно-детерминированной модели

Построим модель изменения температуры в точках тонкой квадратной пластины *G* со сторонами единичной длины (Рисунок 8). Для удобства идентификации точек пластины координатные оси *x* и *y* разместим вдоль сторон пластины.

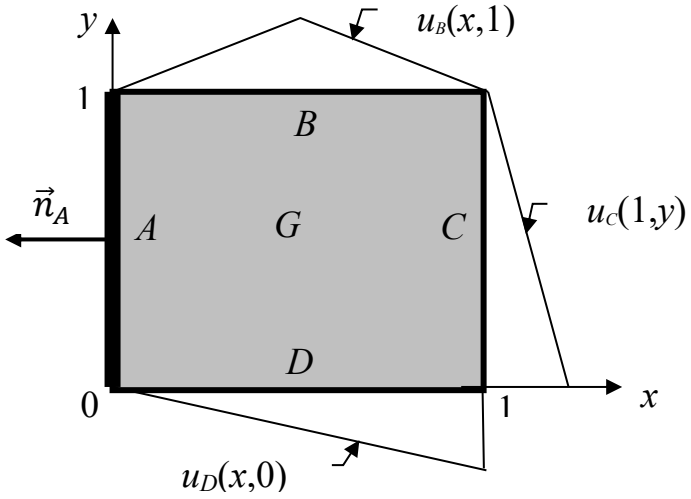

Рисунок 8

В дифференциальном уравнении, описывающем изменение температуры в точках внутри пластины, для простоты положим, что коэффициент *a*=1:

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2}\right) = 0, (x,y) \in G \backslash \Gamma, \forall t.$$

Заметим, что вдоль границ пластины *B*, *C* и *D* температура задана и со временем не меняется, т.е. является статической (Рисунок 8). Распределение температуры вдоль этих границ показаны графически, и имеют следующий аналитический вид:

- Сторона *B*: $\psi_B(x,1) \equiv u_B(x,1) = \begin{cases} 5x, & x \in [0;0.5]; \\ 2.5 - 5(x-0.5), & x \in [0.5;1]. \end{cases}$
- Сторона *C*: $\psi_C(1,y) \equiv u_C(1,y) = 5 - 5y, y \in [0;1]$.
- Сторона *D*: $\psi_D(x,0) \equiv u_D(x,0) = 5x, x \in [0;1]$.

Положим, что сторона пластины *A* термоизолированная, т.е. в точках границы *A* в направлении нормали $\vec{n}_A$ изменения температуры отсутствует (градиент равен

0). Угол отклонения нормали $\vec{n}_A$ относительно оси x: $\alpha = 0$ радиан, проекция нормали на ось x равна -1. Угол отклонения нормали $\vec{n}_A$ относительно оси y: $\beta = \frac{\pi}{2}$ радиан, проекция нормали на ось y равна 1. В результате градиент граничного условия термоизоляции по нормали вдоль стороны *A*, представленный в декартовой системе координат будет в каждой точке границы *A* иметь вид:

$$\frac{\partial u_t(0,y)}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial u_t(0,y)}{\partial x} cos(0) + \frac{\partial u_t(0,y)}{\partial y} cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0; \forall\, y \in (0,1); \forall t \in \overline{0,\infty}.$$

Так как $cos(0) = 1$, а $cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, то условие термоизоляции на границе *A* примет вид:

$$\frac{\partial u_t(0,y)}{\partial \vec{n}} = -\frac{\partial u_t(0,y)}{\partial x} = 0, \forall\, y \in (0,1); \forall t \in \overline{0,\infty}.$$

Заметим, что y принадлежит интервалу $(0,1)$, т.е. крайние точки границы, которые отнесены к сторонам *B* и *D* соответственно, исключены.

В качестве начальных условий для простоты положим, что при $t = 0$ температура во всех внутренних точках пластины равна 0:

$$u_0(x,y) = 0, (x,y) \in G \backslash \Gamma,$$

т.е. температура внутри пластины (за исключением границы) в начальный момент времени $t = 0$ везде равна 0.

В итоге, множество отношений между параметрами непрерывно-детерминированной модели M_G представится в виде:

$$M_G \ni R_G \begin{cases} \dfrac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} - \left(\dfrac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2}\right) = 0, (x,y) \in G \backslash \Gamma, \forall t; \\ \Gamma_B^1 : u_t(x,1) = \psi(x,1) = \begin{cases} 5x, & x \in [0;0.5] \\ 2.5 - 5(x-0.5), & x \in [0.5;1] \end{cases}, \forall t; \\ \Gamma_C^1 : u_t(1,y) = \psi(1,y) = 5 - 5y, \quad y \in [0;1], \forall t; \\ \Gamma_D^1 : u_t(x,0) = \psi(x,0) = 5x, \quad x \in [0;1], \forall t; \\ \Gamma_A^1 : \dfrac{\partial u_t(0,y)}{\partial x} = 0; \ \forall\, y \in (0,1), \forall t; - \text{термоизоляция}; \\ u_0(x,y) = 0, (x,y) \in G \backslash \Gamma, \forall t = 0 - \text{начальное условие}. \end{cases}.$$

Приведение непрерывной модели к численному виду

Заменим все дифференциальные уравнения конечно-разностными аналогами, с одинаковым по осям количеством точек дискретизации *n*=10. Так как пластина квадратная, то шаги дискретизации по *x* и *y* можно для простоты считать одинаковыми, т.е. $h_x = h_y = h$, следовательно, $\lambda = \frac{h_x}{h_y} = 1$. Так как сторона квадрата равна 1, то для n = 10 шаг по осям x и y будет равен $h = 0.1$. Шаг дискретизации по времени будет соответственно равен $\tau = \mu \cdot h^2 = 0.01\mu$. Значение $\mu < 0.25$ следует подбирать соблюдая условие устойчивости конечно-разностных вычислений и с учётом приемлемой методической погрешности численной модели.

При n = 10, a=1 и λ=1 полученная ранее численная форма дифференциального уравнения для внутренних точек пластины $(x_i, y_j) \in G \backslash \Gamma$ принимает вид:

$$u(x_i, y_j, t_{k+1}) = u_{ij}^{k+1} = (1 - 4\mu)u_{ij}^k + \mu\left[u_{i+1j}^k + u_{i-1j}^k + u_{ij+1}^k + u_{ij-1}^k\right];$$

$$i, j = 1,2, \ldots 9; k = 1,2, \ldots.; x_i = 0.1i, y_j = 0.1j, t_k = 0.01\mu k.$$

На границе *A* условие термоизоляции в направлении нормали к границе *A* выражается дифференциальным уравнением вида:

$$\Gamma_A^1: \frac{\partial u_t(0, y)}{\partial x} = 0; \ \forall\, y \in (0,1); \ \forall t,$$

Заменим частную производную в направлении нормали к границе *A*, прямо противоположном оси координат x, конечно-разностным приближением, рассматривая приращение температуры от ближайшей к границе *A* внутренней точки пластины (x_1, y_j) к точке (x_0, y_j) на границе *A* (т.е. в противоположном направлении к оси *x*) с шагом h. В результате, получим следующий численный вид условия термоизоляции на границе *A*:

$$\Gamma_A^1: \frac{\partial u_t(0, y)}{\partial x} \approx \frac{u_{1j}^k - u_{0j}^k}{h} = 0, \qquad \forall\, y_j \in (0,1); \ \forall t.$$

Важно отметить, что угловые точки границ пластины являются "спорными". Это означает, что при дискретизации такие точки границы можно относить к

разным смежным участкам границам. Необходимо принять произвольное решение об отнесении этих точек к той или иной границе, внося в численную модель методическую погрешность. Полагаем, что угловые точки пластины на границе A не термоизолированы, тогда температуры u_{ij}^k в узлах сетки, принадлежащих границе *A*, будут иметь индексы: *i*=0; *j*=1,2,…,9.

Выполнив упрощающие выражение преобразования получим, что на границе *A* формальный численный вид условия термоизоляции сводится к выражению:

$$\Gamma_A^1: u_{0j}^k = u_{1j}^k,\ \ j \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, \forall k = 0,1,2, \dots;$$

т.е. температура в любой точке границы *A*, равна температуре в соответствующей внутренней точке, ближайшей в направлении нормали к точке границы *A*. Заметим, что это утверждение будет справедливым для любой границы с термоизоляцией, параллельной оси координат x или y.

Так как по границам B, C и D температура стационарна, и в спорных углах пластины значения граничных условий стационарности совпадают, то отнесение угловых точек к той или иной смежной стационарной границе - не принципиально.

В результате численная форма условий стационарности температуры на границах B, C и D соответственно примет вид:

$$\Gamma_B^1: u_{i1}^k = \begin{cases} 5 \cdot 0.1i, & i \in \{0,1,2,3,4,5\} \\ 2.5 - 5(0.1i - 0.5), & i \in \{6,7.8.9.10\} \end{cases}, \forall k = 0,1,2, \dots;$$

$$\Gamma_C^1: u_{1j}^k = 5 - 5 \cdot 0.1j,\ \ j \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}, \forall k = 0,1,2, \dots;$$

$$\Gamma_D^1: u_{i0}^k = 5 \cdot 0.1i, i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}, \forall k = 0,1,2, \dots$$

Численная форма начальных условий - температура во внутренних точках пластины при $k = 0$, имеет очевидный вид:

$$u_{ij}^0 = 0, \qquad \forall i,j \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}.$$

Сформируем теперь начальную матрицу температур U^0 в точках пластины для *n*=10, используя ранее полученные выше численные виды граничных и начальных условий:

$$U^k = \begin{cases} u_{i1}^k = \begin{cases} 5 \cdot 0.1i, & i \in \{0,1,2,3,4,5\} \\ 2.5 - 5(0.1i - 0.5), i \in \{6,7.8.9.10\} \end{cases}, \forall k = 0,1,2,\dots; \\ u_{1j}^k = 5 - 5 \cdot 0.1j, \ \ j \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}, \forall k = 0,1,2,\dots; \\ u_{i0}^k = 5 \cdot 0.1i, i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}, \forall k = 0,1,2,\dots; \\ u_{0j}^k = u_{1j}^k, \qquad j \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, \forall k = 0,1,2,\dots; \\ u_{ij}^0 = 0, \qquad i \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, j \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}. \end{cases}.$$

Положив, что ось y направлена по горизонтали "слева направо", а ось x по вертикали "сверху вниз", заполним начальный слой формируемой трёхмерной таблицы U^k значениями температур в узлах сетки, вычисленными в начальный момент времени $k = 0$:

$$U^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.5 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.5 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 5 & 4.5 & 4 & 3.5 & 3 & 2.5 & 2 & 1.5 & 1 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

"Внутренние" элементы матрицы равны 0, и отражают начальное условие. Первая строка матрицы будет соответствовать условию термоизоляции на границе *A*. Температура на границе *A* соответствует температуре в ближайших внутренних точках, т.е. равна 0. Первый столбец матрицы будет соответствовать температуре на границе *D*. Последняя строка матрицы будет соответствовать температуре на границе *C*, а последний столбец – на границе *B*.

Полученная матрица определяет температуру в точках пластины в нулевой момент времени (начальный временно́й слой). Следующие временн'ые слои матрицы *U* вычисляются уже с использованием полученных выше зависимостей по формуле шаблона конечно-разностного уравнения.

Компьютерная реализация модели

Для построения слоёв U^k трёхмерной матрицы температуры в точках пластины в момент времени k воспользуемся табличным процессором Excel, используя полученные ранее конечно-разностные уравнения дискретизированной модели. При этом слои U^k в таблице Excel будем располагать так, что ось y расположится по горизонтали "слева-направо", а ось x – "сверху-вниз". Пластина будет представлена в координатной плоскости, повёрнутой по часовой стрелке на 90° (Рисунок 9).

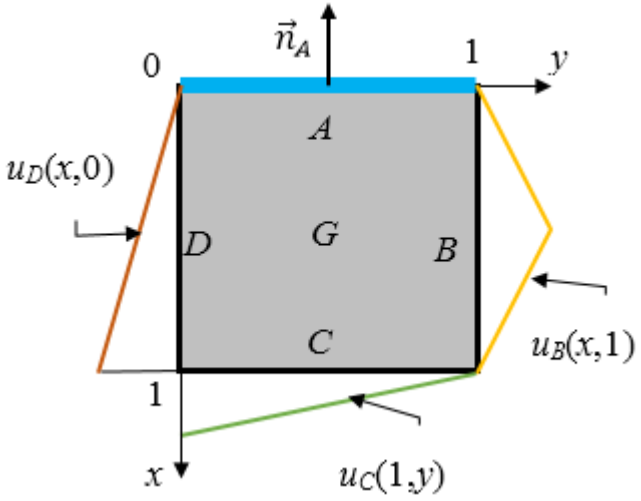

Рисунок 9 Пластина в координатной плоскасти

Для этого положения пластины начальное состояние матрицы $\boldsymbol{U^0}$ примет вид:

$$U^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.5 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.5 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 5 & 4.5 & 4 & 3.5 & 3 & 2.5 & 2 & 1.5 & 1 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

Ниже приводится пример оформления в Excel начального температурного слоя U^0 $(k = 0, t = 0{,}000)$, и следующего временного слоя температуры U^1

$(k = 1, t = 0{,}002)$ в дискретных внутренних узлах пластины, вычисленного с использованием значений температуры во внутренних и граничных узлах предшествующего временного слоя U^0 (Рисунок 10).

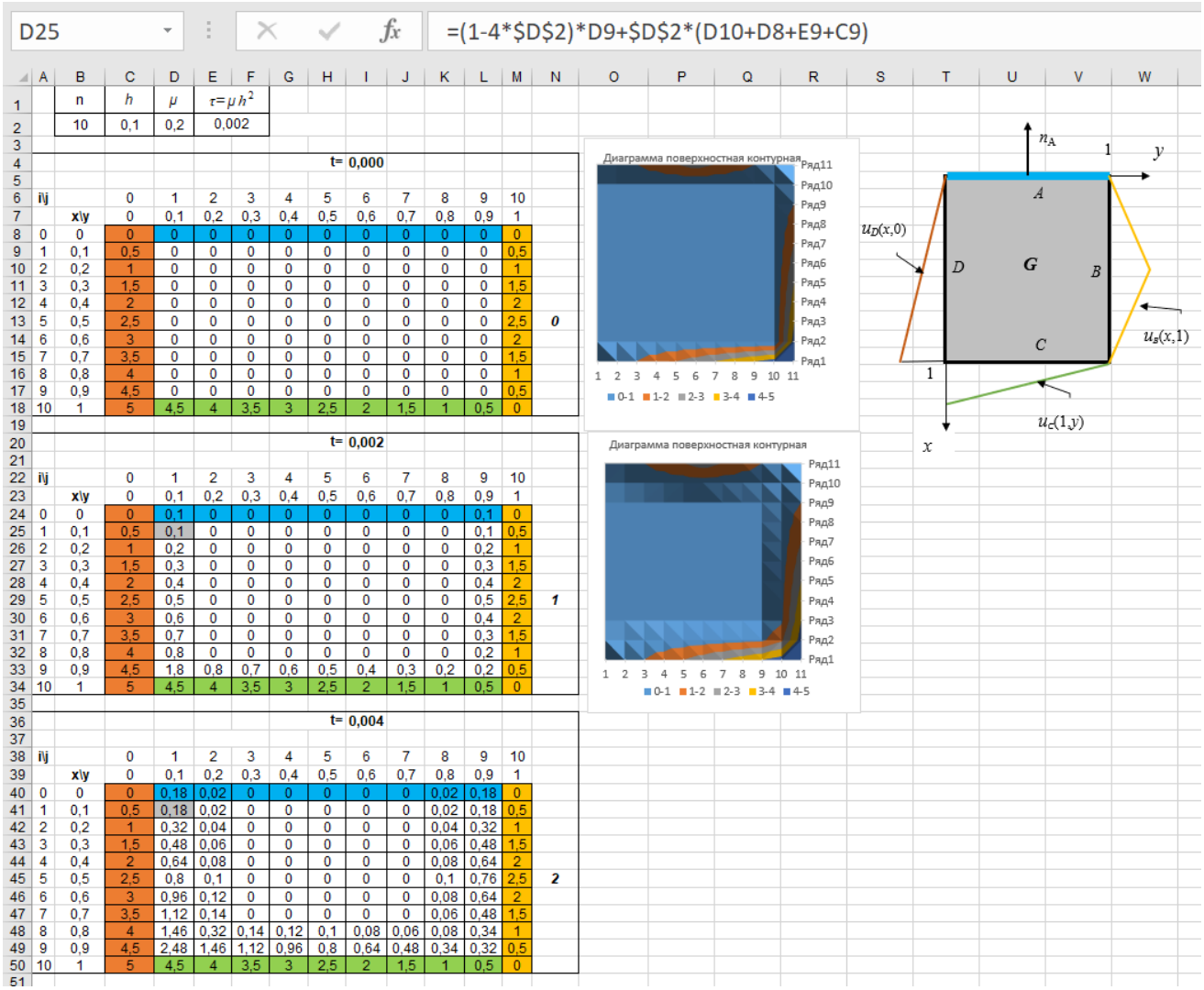

Рисунок 10 Пример временных слоёв температуры в Excel

Граничные ячейки матриц выделены фоновым цветом. Значения в этих ячейках вычисляются в соответствии с формулами граничных условий. Первая матрица U^0 в ячейках электронной таблицы, соответствующих значениям температур внутри пластины в начальный момент времени, содержит нули. А в ячейках электронной таблицы, соответствующих температурам в точках границы, содержатся значения температур, вычисленных в соответствии с дискретизированными граничными условиями. Во второй, нижележащей матрице U^1, ячейки электронной таблицы уже содержат формулы вычисления температур

во внутренних узлах пластины с помощью заданных конечно-разностных уравнений, используя соответствующие значения температур в ячейках предыдущего слоя. На рисунке 10 в поле ввода формул приведено выражение системы Excel в ячейке D25, вычисляющее температуру во внутренней точке пластины u_{11}^1 в соответствии с шаблоном конечно-разностного уравнения. Это выражение следует далее скопировать во все ячейки Excel, соответствующие внутренним узлам пластины, для вычисления в них температуры.

Ячейки Excel, соответствующие узлам границы *A* с термоизоляцией (блок ячеек D24:L24), содержат соответственно формулы =D25, =E25, =F25,…, =L25, т.е. температура в точках границы *A* равна температуре во внутренних точках, непосредственно прилегающих к точкам границы *A* в направлении нормали к границе.

Для того чтобы сделать следующий шаг во времени и получить значения температуры во всех узлах пластины для шага по времени $k+1$, необходимо взять копию всех ячеек области электронной таблицы (на рисунке 10 - ограничена контуром прямоугольника), включающей предыдущую матрицу U^k вместе с показанием времени и номером шага по времени, и вставить копию ниже на том же листе Excel так, чтобы относительные адреса скопированных формул в ячейках новой матрицы U^{k+1} корректно сослались на нужные ячейки предыдущей матрицы U^k. Ячейки с шагом и значением и времени должны содержать формулы и при копировании автоматически обновляться.

Копирование, для получения матриц следующего временно́го слоя, следует выполнять до тех пор, пока результаты вычислений согласуются с физикой процесса изменения температуры и ещё не достигнуто стационарное состояние температуры с заданной точностью. Признаком достижение стационарного состояния является то, что значения температур очередного слоя не отличаются от соответствующих значений температур предыдущего слоя более чем на заданную величину погрешности.

В процессе вычислений может выявиться несогласованность результатов вычислений, возникающая из-за накапливающейся методической погрешности и погрешности вычислений. Это может выразиться, например, в появлении отрицательных значений температуры, там, где это практически невозможно (итерационный вычислительный процесс начинает расходиться). В этом случае необходимо остановить процесс копирования слоёв матрицы. Далее следует изменить коэффициент μ - пропорции между приращениями временно́й и пространственной координатами, существенно влияющей на устойчивость и сходимость результатов вычислений методом конечных разностей (см. ниже пункт "Исследование вычислительной устойчивости").

Используя машинную графику системы Excel, содержимое выделенной текущей матрицы можно изобразить в виде контурной диаграммы температур поверхности пластины. А именно, выбрав стандартную диаграмму типа «поверхность» в виде «контурной диаграммы» с рядами в столбцах, представляющей собой вид сверху на расцвеченную поверхностную диаграмму, можно представить температурные поля пластины для различных временных сечений. Цвета на диаграмме будут соответствовать интервалам значения температуры. Ниже (Рисунок 11) показан пример такой диаграммы для t=0,234:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1859														
1860								t= 0,232						
1861														
1862	i\j		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1863		x\y	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	
1864	0	0	0	1,01	1,28	1,42	1,47	1,48	1,44	1,36	1,22	0,97	0	
1865	1	0,1	0,5	1,01	1,28	1,42	1,47	1,48	1,44	1,36	1,22	0,97	0,5	
1866	2	0,2	1	1,26	1,43	1,52	1,55	1,54	1,5	1,43	1,34	1,2	1	
1867	3	0,3	1,5	1,6	1,67	1,69	1,68	1,64	1,6	1,56	1,52	1,5	1,5	
1868	4	0,4	2	1,99	1,96	1,91	1,85	1,78	1,72	1,68	1,7	1,79	2	
1869	5	0,5	2,5	2,39	2,28	2,16	2,04	1,92	1,83	1,77	1,8	1,98	2,5	***116***
1870	6	0,6	3	2,81	2,62	2,42	2,23	2,06	1,91	1,8	1,76	1,82	2	
1871	7	0,7	3,5	3,23	2,96	2,69	2,43	2,18	1,96	1,77	1,62	1,54	1,5	
1872	8	0,8	4	3,65	3,31	2,96	2,62	2,3	1,99	1,7	1,44	1,21	1	
1873	9	0,9	4,5	4,08	3,65	3,23	2,81	2,4	2	1,6	1,22	0,86	0,5	
1874	10	1	5	4,5	4	3,5	3	2,5	2	1,5	1	0,5	0	
1875														
1876								t= 0,234						
1877														
1878	i\j		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1879		x\y	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	
1880	0	0	0	1,01	1,28	1,42	1,48	1,48	1,44	1,36	1,22	0,97	0	
1881	1	0,1	0,5	1,01	1,28	1,42	1,48	1,48	1,44	1,36	1,22	0,97	0,5	
1882	2	0,2	1	1,26	1,43	1,52	1,55	1,54	1,5	1,44	1,34	1,2	1	
1883	3	0,3	1,5	1,6	1,67	1,69	1,68	1,65	1,6	1,56	1,52	1,5	1,5	
1884	4	0,4	2	1,99	1,96	1,91	1,85	1,78	1,72	1,69	1,7	1,79	2	
1885	5	0,5	2,5	2,39	2,28	2,16	2,04	1,92	1,83	1,78	1,8	1,98	2,5	***117***
1886	6	0,6	3	2,81	2,62	2,42	2,24	2,06	1,91	1,8	1,76	1,82	2	
1887	7	0,7	3,5	3,23	2,96	2,69	2,43	2,19	1,96	1,77	1,62	1,54	1,5	
1888	8	0,8	4	3,65	3,31	2,96	2,63	2,3	1,99	1,7	1,44	1,21	1	
1889	9	0,9	4,5	4,08	3,65	3,23	2,81	2,4	2	1,6	1,22	0,86	0,5	
1890	10	1	5	4,5	4	3,5	3	2,5	2	1,5	1	0,5	0	

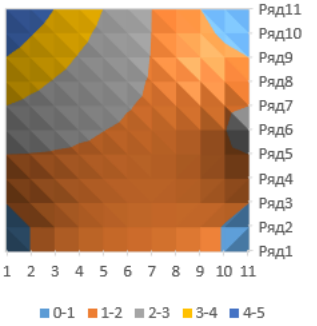

Рисунок 11 Стационарное состояние температуры

На диаграмме ряд Ряд1 показывает температуру вдоль границы D (y=0, x пробегает значения от 0 до 1), ряд Ряд11 показывает температуру вдоль границы B (y=1, x пробегает значения от 0 до 1). Левая сторона квадрата диаграммы показывает температуру вдоль границы A (x=0, y пробегает значения от 0 до 1), правая сторона квадрата диаграммы показывает температуру вдоль границы C (x=1, y пробегает значения от 0 до 1).

Заметим, что температура во внутренних точках пластины для временных слоёв t=0,232 и t=0,234 одинаковая, т.е. с точностью до сотых стабилизировалась и в дальнейшем с этой точностью будет оставаться неизменной. На этом построение временных слоёв функции температуры в точках пластины - $u(x_i, y_j, t_k)$, следует завершить.

Исследование вычислительной устойчивости численного модели

Параметр μ, определяющий пропорции между приращениями временно́й и пространственной координатами, существенно влияет на сходимость вычислительного процесса нахождения временны́х слоёв матрицы температур U^k.

Например, при μ=0.5 вычислительный процесс начинает расходиться уже на 6-ом временно́м слое. Об этом говорит появление отрицательных температур, что не соответствует физическим условиям (значения температуры не адекватны). Если учесть, что разностная схема устойчива при $\tau < h^2/4$, то, например, при μ=0.2 вычислительный процесс остаётся устойчивым и на 36-ом временно́м слое (Рисунок 11).

Кроме устойчивости, выбор по осям декартовой системы координат шага дискретизации оказывает влияние и на практическую значимость (погрешность) результатов вычислений. На практике приемлемое значение параметров дискретизации подбирается опытным путём в результате экспериментов с моделью.

Практическое применение модели

Численная модель изменения температуры в точках тонкой пластины в форме полученной матрицы температур в стационарном состоянии может быть реализована программно как виртуальная физическая пластина, и на практике может быть использована, например, для отладки и тестирования приложения, осуществляющего мониторинг температуры физического объекта и отображающей её на экране монитора. При этом модуль приложения, реализующий реальный опрос во времени датчиков температуры в точках пластины, через интерфейс обращения к реальным датчикам температуры по заданным координатам узлов пластины выдавала бы температуру, формируемую моделью в реальном времени с заданной частотой опроса температуры. Это позволяет не только отлаживать работу программы без использования физического объекта, но выявлять её способность осуществлять мониторинг физического объекта в заданном режиме реального времени.